

# Devoir Maison 2

Pour le 6 octobre 2025

## Exercice

*(adapté de EDHEC ECS 2020)*

Dans tout l'exercice, on désigne par  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ).

### Partie I — Préliminaires

1. On considère un projecteur  $p$  de  $E$ , c'est-à-dire un endomorphisme de  $E$  tel que  $p \circ p = p$ .

(a) Montrer que  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$

(b) Établir que  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$

(c) Notons  $r = \text{Rang}(p)$ . Montrer qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad p(e_k) = e_k, \quad \forall k \in \llbracket r+1, n \rrbracket, \quad p(e_k) = 0_E$$

(d) En écrivant la matrice de  $p$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ , montrer que  $\text{Rg}(p) = \text{Tr}(p)$

2. Montrer par récurrence sur  $k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) que, si  $E_1, \dots, E_k$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$$

### Partie II — C.N.S. pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit  $p_1$  et  $p_2$  deux projecteurs de  $E$  et  $q = p_1 + p_2$ . Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $p_1$  et  $p_2$  pour que  $q = p_1 + p_2$  soit un projecteur.

1. Montrer que, si  $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$  alors  $q$  est un projecteur.

On suppose désormais que  $q$  est un projecteur.

2. (a) Montrer que  $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$

(b) Justifier que  $\text{Rang}(q) = \text{Rang}(p_1) + \text{Rang}(p_2)$  et que

$$\dim(\text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)) \leq \dim(\text{Im}(p_1)) + \dim(\text{Im}(p_2))$$

(c) En déduire que  $\text{Im}(q) = \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2)$  puis que  $\text{Im}(p_1 + p_2) = \text{Im}(p_1) \oplus \text{Im}(p_2)$

3. (a) Soit  $x \in E$ , montrer que  $p_1(x) \in \text{Ker}(q - \text{Id})$ .

(b) En déduire que  $q \circ p_1 = p_1$  et  $q \circ p_2 = p_2$ .

(c) En déduire qu'alors  $p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

4. Conclure

### Partie III — Généralisation

Soit un entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de  $E$ , notés  $p_1, p_2, \dots, p_k$  et on note  $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ . On veut généraliser le résultat précédente à une somme de  $k \geq 2$  projecteurs.

1. Montrer que si, pour tout couple  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , on a  $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , alors  $q_k$  est un projecteur.

*On suppose dans toute la suite que  $q_k$  est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , on a  $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .*

2. (a) Montrer que  $\text{Im}(q_k)$  est inclus dans  $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$ .

(b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que  $\text{Rang}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k))$ , puis en déduire que  $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$ .

(c) Établir finalement l'égalité

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$$

3. (a) Montrer que, pour tout  $j$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket$ , on a l'égalité  $q_k \circ p_j = p_j$ .

(b) En déduire que, pour tout  $j$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket$ , on a :  $\forall x \in E, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k p_i(p_j(x)) = 0$ .

(c) Montrer alors que, pour tout couple  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, k \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ , on a  $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

4. Conclure quant à l'objectif de cette partie.